第６章　誘電体の基本定数の測定法

１．　誘電率の測定

物質の誘電率を測定する方法は種々あり、電気伝導率や周波数によって使い分けている。ここではもっとも良く使用されているインピーダンスアナライザーについてその原理をのべる。以下に述べる測定方法は、ソーラトロン社製の 1255B 型周波数応答アナライザー（FRA）と 1296 型誘電率測定インターフェイスを組み合わせた装置に使用されているものであり、SSC（Single Sine Correlation）と呼ばれている。

今、複素インピーダンス Z が次式で与えられる試料を考える。

$$Z = Z_0 e^{i\phi} = Z_0(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{6.1}$$

この試料に各周波数ωの交流電圧

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

を加えた時に発生する電流 I は

$$I = \frac{V_0}{Z} e^{i\phi} = \frac{V_0}{Z_0} \exp i(\omega t - \phi) \tag{6.2}$$

ここで、V と I の実部の積を１周期について積分すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Re}(V)\cdot\mathrm{Re}(I)dt = \frac{V_0}{TZ_0}\int_0^T \cos\omega t\cos(\omega t - \phi)dt \\ &= \frac{V_0}{2TZ_0}\int_0^T \{\cos(2\omega t - \phi) + \cos\phi\}dt \\ &= \frac{V_0}{2Z_0}\cos\phi \end{aligned} \tag{6.3}$$

一方、電圧と電流の位相をπ/2 ずらした波形の積を同様に積分すると

$$\begin{aligned} &\frac{V_0}{Z_0}\int_0^T \cos(\omega t + \pi/2)\cos(\omega t - \phi)dt \\ &= \frac{V_0}{2Z_0}\sin\phi \end{aligned} \tag{6.4}$$

を得る。これはそれぞれ複素インピーダンスの実部と虚部（の半分）を与える。このようにして複素インピーダンスを試料に印加した電圧と、試料を流れる電流を測定することにより決定できる。

２．D-E 履歴曲線の測定法

これは一般的につぎのような Sawyer-Tower 法が用いられている。これより自発分極、残留分極および抗電場の値が求められる。

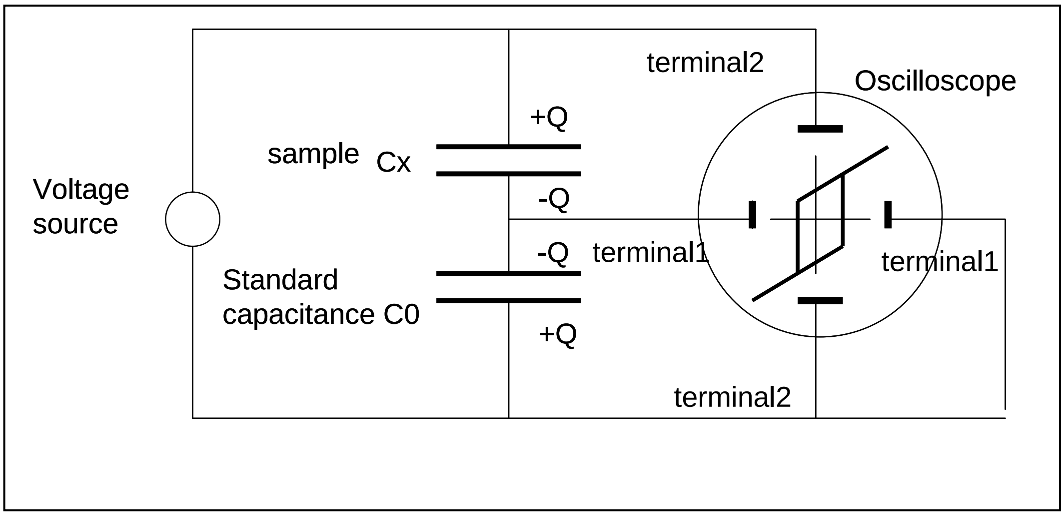

図６．１　D-E 履歴曲線を測定するための Sawyer-Tower Bridge

いま図６．１のように測定しようとする試料（電気容量 Cx）と標準コンデンサー（電気容量 C0）を直列に接続する。このとき、試料と標準コンデンサーの両端には同じ電荷量 Q が蓄積される。試料と標準コンデンサーの電圧を Vx, V0 とすると

$$Q = C_x V_x$$
$$Q = C_0 V_0$$

ここで C0>>Cx とすると　Vx>> V0 となるから、試料の印加電圧は電源電圧と殆ど同じとなる。

一方、電荷 Q は自発分極 Ps に極板の面積 S をかけたもの Q=PsS であるので、標準試料の電圧

$$V_0 = \frac{Q}{C_0} = \frac{PsS}{C_0} \tag{６．５}$$

であたえられる。これより $V0, S, C0$ から Ps が決定できる。D-E 履歴は、図の端子１をオシロスコープの X 軸に、端子２を Y 軸に入れれば測定できる。

演習問題　６．１　標準コンデンサー$C0$ の位置に抵抗 R を入れたときに、同様の装置で観測される波形は何を意味するか。

６．３　圧電係数

ある種の結晶に応力 Xを加えると電気分極 Pが誘起され、あるいは電場 Eを加えると歪 e が発生する。この現象を圧電効果（前者を正圧電効果、後者を逆圧電効果）と呼ぶ。この効果は Curie 兄弟により発見された。圧電効果は

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ijk} X_{jk} \quad \text{または} \quad e_{ij} = \sum_{j=1}^{3} d_{ijk} E_k \qquad (6.6)$$

と表わすことができる。

問題６．１　（６．６）式のｄ定数の次元を求め、どちらも同じ次元で表わされることを示せ。

式（６．６）式から明らかなように、ｄ定数は３階の極性テンソク量である。したがって中心対称性を持たない点群に属する結晶は圧電効果を示す。これより強誘電体はすべて圧電効果を示す。圧電効果は強誘電体結晶に大きな効果をもつものが非常に多く、強誘電体の応用の大きな分野となっている。

圧電特性を評価するもうひとつの大事な定数は電気機械結合定数 K である。K は機械的なエネルギー（弾性エネルギー）と電気エネルギー（静電エネルギー）の比であり次式で与えられる。

$$K^2 = \frac{d_{13}}{\varepsilon_{33} s_{11}} \qquad (6.7)$$

問題６．２　電気機械結合定数の定義から（６．７）式を導け。

圧電効果の正確な測定は、以下に述べる共振・反共振法(resonance/anti-resonance)が用いられている。

圧電結晶に電場と応力を同時にかけると、その電気変位 Dと歪は

$$e_{ij} = \sum_{k,l}^{3} s_{ijkl} X_{kl} + \sum_{j=1}^{3} d_{ijk} E_k \qquad (6.8)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_k + \sum_{j=1}^{3} d_{ijk} X_{jk} \qquad (6.9)$$

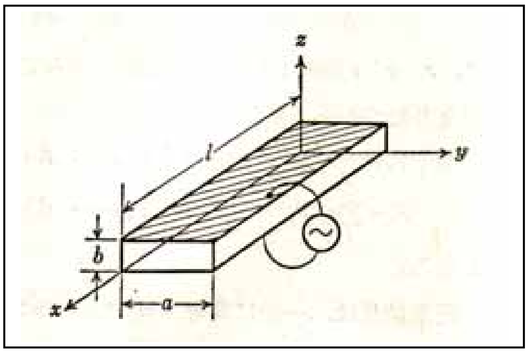

図６．２　共振・反共振法による圧電効果の測定

今図６．２に示すようにンソル主軸 *x,y,z* 軸に平行に結晶を切り出す。このとき *l*>>*a,b* とする。 *z* 軸方向に交流電圧を加え、 *x* 軸方向の伸び縮みを考える。*y,z* 方向の応力は０、電場は *z* 成分のみをもつので

$$e_1 = s_{11} X_1 + d_{13} E_3 、D_3 = \varepsilon_{33} E_3 + d_{31} X_1 \qquad (6.10)$$

x 方向の変位を *u* とし、*x* 方向に働く力を *F*x、密度をρとすると、運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho dxdydz \frac{d^2 u}{dt^2} = F_x = (\frac{\partial X_1}{\partial x} dx) dydz \qquad (6.11)$$

これより

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial X_1}{\partial x} \qquad (6.12)$$

一方、（６．１０）式の両辺を *x* で微分し、歪の定義式　$e_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$　を用いると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s_{11} \frac{\partial X_1}{\partial x}$$

これを（６．１２）式に代入すると

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.13)$$

これは波動方程式を表わす。この解を

$$u(x,t) = A \exp i(\omega t - kx)$$

とおいて（６．１３）式に代入とする

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}}}$$

を得る。これは波の速度 v（音速）を与える。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}}} \qquad (6.14)$$

で与えられる。（６．１３）式の解は

$$u(x,t) = u(x)\exp(i\omega t)$$

$$u(x) = A\sin kx + B\cos kx \qquad (6.15)$$

で与えられるが、ここで定数A，Bは境界条件で決まる。いま試料の両端を固定しないときは $x=0$ および $x=\ell$ でX_1=0 なので（６．１０）式より

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = Ak\cos kx - Bk\sin kx = d_{13}E_3 \qquad (6.16)$$

したがって

$$Ak = d_{13}E_3$$

$$Bk = \frac{d_{13}E_3(\cos k\ell - 1)}{\sin k\ell} = \frac{d_{13}E_3(-2\sin^2(k\ell/2))}{2\sin(k\ell/2)\cos(kl/2)}$$

$$= -d_{13}E_3\tan(kl/2)$$

$$(6.17)$$

これより

$$e_1 = d_{13}E_3\cos kx - \frac{d_{13}E_3(\cos k\ell - 1)}{\sin k\ell}\sin kx \qquad (6.18)$$

さらに変形して

$$
\begin{aligned}
e_1 &= d_{13}E_3\cos kx + d_{13}E_3\tan(kl/2)\sin kx \\
&= d_{13}E_3\frac{\cos kx\cos(kl/2)+\sin kx\sin(kl/2)}{\cos(kl/2)} \\
&= d_{13}E_3\frac{\cos[kx-kl/2]}{\cos(kl/2)}
\end{aligned}
\qquad （６．１９）
$$

これを（６．１０）式に代入すると

$$
\begin{aligned}
D_3 &= (\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})E_3+\frac{d_{13}}{s_{11}}e_1 \\
&= \{(\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})+\frac{d_{13}^2}{s_{11}}\frac{\cos[kx-kl/2]}{\cos(kl/2)}\}E_3
\end{aligned}
\qquad （６．２０）
$$

これより z 方向に流れる電流 $I3$ は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
I_3 &= i\omega\int_0^l aD_3dx = i\omega\{(\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})al+\frac{d_{13}^2}{ks_{11}}\frac{2\sin(kl/2)}{\cos(kl/2)}\}E_3 \\
&= i\omega\{(\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})al+\frac{2d_{13}^2}{ks_{11}}\tan(kl/2)E_3
\end{aligned}
\qquad （６．２１）
$$

これよりアドミッタンス Y は

$$
Y=\frac{I_3}{bE_3}=i\omega\frac{al}{b}\{(\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})+\frac{2d_{13}^2}{lks_{11}}\tan(kl/2)\} \qquad （６．２２）
$$

で与えられる。

したがって、 Y は

$$
k_rl=\pi
$$

あるいは

$$
f_r=\frac{k_rv}{2\pi}=\frac{v}{2l}=\frac{1}{2l\sqrt{\rho s_{11}}} \qquad （６．２３）
$$

のとき∞になり、

$$(\varepsilon_{33}-\frac{d_{13}^2}{s_{11}})+\frac{2d_{13}^2}{lk_a s_{11}}\tan(k_a l/2)=0 \qquad （６．２４）$$

のとき、Y＝０となる。

$$\Delta f = f_a - f_r << f_r$$

のとき（６．２３）と（６．２４）式より

$$\frac{K^2}{1-K^2}=\frac{\pi^2}{4}(\frac{\Delta f}{f_r}) \qquad （６．２５）$$

を得る。これよりΔfと f_r から電気機械結合定数Ｋを直接得ることができる。
周波数 f_r および f_a を、それぞれ共振周波数、反共振周波数と呼ぶ。

問題６．３　式（６．２５）を導け。