第4章　ポアンカレ球による偏光の表示

4.1. はじめに

ポアンカレ球によって偏光状態と偏光の変換を非常に直感的にすばやく求める事が出来る。ポアンカレ球は、ストークス・ベクトルという 4 つの成分で偏光を記述する方法に立脚している。すなわち

$$S_0 = A_x^2 + A_y^2$$

$$S_1 = A_x^2 - A_y^2$$

$$S_2 = 2A_x A_y \cos\delta$$

$$S_3 = 2A_x A_y \sin\delta \tag{4.1}$$

ここで各パラメーターは、結晶中を伝播する平面波の x 成分と y 成分

$$D_x = A_x \cos\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_x\right)$$

$$D_y = A_y \cos\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_y\right)$$

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

で定義されている。
これより

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2 \tag{4.2}$$

$$S_3 = 2A_x A_y \left(\frac{\sin 2X}{\sin 2\alpha}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2A_x A_y \left\{ \frac{\left(A_x^2 + A_y^2\right)}{2A_x A_y} \right\} \sin 2X \\
&= S_0 \sin 2X
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= 2A_x A_y \left(\frac{\tan 2\psi}{\tan 2\alpha} \right) \\
&= 2A_x A_y \left\{ \frac{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \right\} \tan 2\psi \\
&= 2A_x A_y \left\{ \frac{\left(A_x^2 - A_y^2\right)}{2A_x A_y} \right\} \tan 2\psi \\
&= S_1 \tan 2\psi
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1^2 &= S_0^2 - S_2^2 - S_3^2 \\
&= S_0^2 - S_1^2 \tan^2 2\psi - S_0^2 \sin^2 2X
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
S_1^2 &= \frac{\left(S_0^2 \cos^2 2X\right)}{\left(1 + \tan^2 2\psi\right)} \\
&= S_0^2 \cos^2 2X \cos^2 2\psi
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

結局

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_0 \cos 2X \cos 2\psi \\
S_2 &= S_1 \tan 2\psi = S_0 \cos 2X \sin 2\psi \\
S_3 &= S_0 \sin 2X
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

となる。

これは直角座標$\left(S_1, S_2, S_3\right)$と極座標$\left(S_0, 2X, 2\psi\right)$の関係を示す。ここで$\psi$は楕円偏光の方位、$X$は楕円率を表しているので、半径$S_0$の球の 1 点 1 点が色々な方位と楕円率をもつ偏光状態を表している。ここで球の経度が方位の 2 倍を、又緯度が楕円率の 2 倍を表している。これをポアンカレ球（P 球）と呼ぶ。

（図 4.1）ポアンカレ球の図

4.2. ポアンカレ球の性質

(1) 直線偏光：

直線偏光は楕円率が 0 の楕円偏光であるから P 球では赤道上の点で表される。

(2) 円偏光：

円偏光を$X = \pm\dfrac{\pi}{4}$で表されるので、極$\left(2X = \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される。ここで一般に右回り偏光$(\delta > 0)$では

$$\sin 2X = \sin 2\alpha \sin\delta$$
$$\sin\alpha > 0$$

から

$$\sin 2X > 0$$

すなわち$X > 0$となる。従って北半球にあれば右回り偏光を、又南半球にあれば左回り偏光を表す。これより北極点が右回り偏光、南極点が左回り円偏光となる。

(3) P 球の任意の点$\left(S_1, S_2, S_3\right)$から下ろした足が$\left(S_1, S_2\right)$平面と交わる点を$\left(S_1, S_2\right)$とする。Q から$S_2$軸に平行に線を引くと、この線は$S_1$軸と R で交わる。

QR と PR のなす角度をωとすると

$$
\begin{aligned}
\tan\omega &= \frac{S_3}{S_2} \\
&= \left(\frac{2A_x A_y \sin\delta}{2A_x A_y \cos\delta}\right) \\
&= \tan\delta
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

従って

$$\omega = \delta$$

となる。すなわち任意の偏光の位相差δは、偏光を表す P 球上の点から上のような操作をすることによって得られる。

(4) 直交する 2 つの偏光

2 つの直交する偏光を P 球上で表すと、P 球の原点に関して互いに球の反対にある 2 つの点で表される。すなわち右回りは左回りとなり、方位ψは 90 度異なり、楕円率の絶対値が同じ偏光が直交する。

(5) 強度：

P 球上の点 P で表される偏光（強度I_0）を Q 点で表される偏光方向を持つ偏光子に入れた時、出てくる光の強度Iは P と Q とを通る大円π上の弧 PQ の長さを用いて

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{PR}{2}\right) \tag{4.9}$$

となる。例えば直交する直線偏光は$PR = \pi$なので

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{4.10}$$

円偏光が任意の偏光面の偏光子を通る時、$PR = \dfrac{\pi}{2}$であるから

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{I_0}{2} \tag{4.11}$$

となる。すなわち強度は半分となる。

4. 3. ポアンカレ球による偏光の変換

偏光状態の変換は、P 球上の図形的な操作により求められる。一般的な変換操作を求める為に、ジョーンズ法に対応させて説明しよう。ジョーンズ法では、f軸がx軸よりθ傾き、又位相差がεの結晶を考え、そこを通る光の偏光状態の変換を次のような過程に分解して考えた。

(1) 結晶の f 軸をθ回転させる演算子T_θ

Ｐ球上では、図のように NS 軸を回転軸として初期偏光状態を表す点 P を2θ回転させた時得られる点P′が求められるものである。すなわち、この操作では楕円率は一定で方位だけが変化する。

(2) 位相差をδ変化させる演算子T_ε

P 球の性質で示したように、P 点で表される偏光の位相差は図のようにS_1軸となす角度ωで表される。従って、S_1軸を回転軸として時計回りにεだけ P 点を回転すればよい。

(3) f 軸がx軸となす角度θ、位相差がεの結晶を表す演算子$T_{\theta,\varepsilon}$

ジョーンズ法では、まず結晶の f 軸を$-\theta$回転させてx軸と一致させた上で位相をε変化させ、それから f 軸をθ回転させて元に戻した。従って

$$T_{\theta,\varepsilon} = T_\theta T_\varepsilon T_{-\theta}$$

となった。これは P 球の上では、まず NS 軸のまわりに P 点を -2θ 回転させて P' 点を得、次に S_1 軸のまわりに P' 点を ε 時計回りに回転させて P'' を得、最後に NS 軸のまわりに P'' を 2θ 回転させて P''' を得る操作に対応する。この操作は次のようにすれば一度に実現出来る。すなわち

「S_1 軸を 2θ 回転させて得られる S_1' 軸のまわりに、P 点を ε だけ時計回りに回転すれば P''' 点が得られる」。

　次にいくつかの例を示す。

4. 3. 1.　直線偏光から円偏光を作る

4. 3. 2.　円偏光を直線偏光に変える

4. 3. 3.　直線偏光を回転させる

4. 3. 4.　右円偏光を左円偏光に変える

4. 3. 5.　楕円偏光を直線偏光に変える

4. 3. 6.　セナルモン法

4. 3. 7.　アイソレーターの原理

　レーザー光が光学素子などによって反射されて元に戻り、レーザー共振器の中に入ると、共振器の中で誘導輻射によって作られる位相の揃った光とは異なる位相を持つ光が入って来てしまうので、レーザー光の発振を見出してしまう。この様な事はできるだけ避けるようにしたい。この為に使用する光学素子をアイソレーターと呼ぶ。アイソレーターの原理は、円偏光の性質を巧みに利用する。

　例えば、右回り円偏光が鏡に反射されるとどのように変わるであろうか。鏡は右手系を左手系に変える操作を行う。従って右回り円偏光を左回りに、又左回り円偏光は右回りとなる。この原理を図に示す。

　さて、アイソレーターは一枚の偏光子とその偏光面と 45°傾いた f 軸を持つ

$\dfrac{\lambda}{4}$板からなる。レーザーから出た光は、偏光子を通って直線偏光P_1となる（通常光面に一致させる）。次に$\dfrac{\lambda}{4}$板を通ると、ポアンカレ球で示すように、右回り円偏光P_2になる。この右回り円偏光は、光学素子に反射されると左回りとなる。左回り円偏光P_3は、向きを逆にして再び$\dfrac{\lambda}{4}$板を通る。この光に対して、$\dfrac{\lambda}{4}$板のf軸は－45°傾いている。従って、ポアンカレ球上で$-S_2$軸を回転軸として位相差に対応する角度90°を時計回りに回転すればP_4が得られる。これは偏光子から出てくる直線偏光P_1に対して90°傾いているので、偏光子を通過することが出来ない。このようにして反射光はレーザー光に戻らないようにする事が可能となる。

演習問題

1. 楕円率χ、方位0の楕円偏光を4分の1波長板で直線偏光に変換する方法を求めよ。この時、直線偏光の方位はどうなるか。
2. 右回り円偏光を左回り円偏光に変換するにはどうしたらよいか。