第 3 章　Jones 法による偏光状態の変換の記述

3. 1. ジョーンズ行列による偏光状態の変換

偏光状態ϕ_1をϕ_2に変換する素子は、2 つの偏光状態を表す 2 次元ベクトルを結び付ける量なので、2×2 の行列で記述される。ここで光学弾性軸がx軸からθの方向を向き、且つ位相差がεの結晶はどのような 2 行 2 列の行列で表されるかを求めてみよう。このような一般的な偏光状態を表す行列が得られれば、いくつかの素子通過した時偏光がどのように変化するかは行列の簡単な演算から得られる。その為に以下のように、3 つの過程を考えてみよう。

(1)　結晶の光学弾性軸（屈折率楕円体の切断面の長軸、短軸）を右回りにθ回転させる演算子をT_θとしよう。これは座標をθ回転させる演算子と等価であるので

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

ただし、θは 2 つの光学弾性軸のうちの f 軸（速度の速い光の振動方向、fast 軸と呼ばれている）からの角度とする。この演算子は、偏光の方位角をθ回転させることにも対応する。

(2) 結晶の位相のみを変える演算子

x軸方向の位相をεだけ進める演算子をT_εとすると

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varepsilon}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

(3) 結晶の f 軸がx軸よりθの角度をなし、 f 軸方向に振動する波の位相が結晶

を透過するとε進む時、この偏光変換を表す行列は、まずf軸を$-\theta$回転させてf軸とx軸を一致させ、そこで位相をε進ませ次にf軸をθ回転させて元に戻せばよい。この演算子を$T_{\theta,\varepsilon}$とすると

$$T_{\theta,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varepsilon}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\cos^2\theta + e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}\sin^2\theta & i\sin 2\theta \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ i\sin 2\theta \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\sin^2\theta + e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

(4) 波長板

偏光の変換素子として、位相差εがπのものと$\dfrac{\pi}{2}$のものがよく使用される。この素子は波長板と呼ばれている。このうち$\varepsilon=\pi$の素子は、光路差が波長の半分であるので半波長板、又$\varepsilon=\dfrac{\pi}{2}$のものは、光路差が波長の 4 分の 1 であるので 4 分の 1 波長板と呼ばれている。決して透過光の波長が半分になったり、4 分の 1 になったりする機能を持った素子ではないことに注意せよ。

（半波長板のジョーンズ行列）
$\varepsilon=\pi$を上式に代入すると

$$T_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

これが半波長板を与える Jones 行列である。

（4 分の 1 波長板）

$\varepsilon=\dfrac{\pi}{2}$を代入すると

$$T_{\theta,\pi/2} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta + e^{-i\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} i\sin 2\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} i\sin 2\theta & e^{i\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta + e^{-i\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

となる。

(5) 直線偏光素子

　x方向に偏光面をもつ偏光子$T_{p,0}$は

$$T_{p,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

で表される。従ってx軸からθ回転した偏光子$T_{p,0}$は

$$T_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

となる。

3. 2. ジョーンズ法の応用

3. 2. 1 偏光の変換

(1) 半波長板を用いた直線偏光の回転

　半波長板を用いると、入射直線偏光の偏光面を任意に角度回転することが出来る。今、x方向に偏った入射直線偏光が半波長板に入射したとする。半波長板のf軸がx軸からθ傾いているとすると、(3.4)式を用いて出てくる光ϕは次式で与えられる。

$$\phi = T_{\theta,\pi}\phi_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

これはx軸、すなわち入射直線偏光の偏光面から2θ傾いた直線偏光を示している。直線偏光をθ回転させたい時は、半波長板のf軸を入射直線偏光から$\dfrac{\theta}{2}$傾ければよい。これより直線偏光を 90°傾けたい時には、半波長板のf軸を 45°傾ければよいことがわかる。

(2) 直線偏光から円偏光への変換

この時は 4 分の 1 波長板を入射直線偏光に対して 45°傾ければよい。

$$\begin{aligned}\phi &= T_{\pi/4,\pi/2}\phi_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.9}$$

これは右回りの円偏光である。

3. 2. 2. 干渉色

図のように直交する 2 つの偏光子 1,2 の間にf軸がx軸よりθ傾き、位相差がεの結晶をおく。この時偏光子 2 から出てくる光の強度を求めよう。偏光子 1 をx軸に平行にすると、透過光はx軸に偏った直線偏光であるから

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

又この結晶のジョーンズ行列は前節で求めた

$$T_{\theta,\varepsilon} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\cos^2\theta + e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}\sin^2\theta & i\sin 2\theta \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ i\sin 2\theta \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\sin^2\theta + e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$\phi = T_{p,\pi/2} T_{\theta,\varepsilon} \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sin(2\theta)\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

これは勿論 y 軸方向に偏った直線偏光を表しているが、その強度は上式より

$$I = |\phi|^2 = I_0 \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.12}$$

ここで位相差 ε は複屈折 $\Delta n = n_1 - n_2$、結晶の厚さ d を用いて

$$\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta n \cdot d$$

と書けるので

$$I = I_0 \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left\{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\Delta n \cdot d\right\} \tag{3.13}$$

となる。これより、次のような現象が観察される。

(1)　θ を変えると、$\frac{\pi}{2}$ ごとに暗くなる。結晶の光学弾性軸が x 軸、すなわち偏光子 1 の偏光面と一致する時、θ は 0、$\frac{\pi}{2}$、$\pi\cdots$ となるので強度は 0 となる。この方法は、結晶の光学弾性軸を見つける一般的な方法となっている。ただし、これから f 軸であるか、s 軸であるかを判断することは出来ない。

(2)　θ が 45°の時、透過光強度は最大となるので、θ を 45°に固定しよう。この時入射波長の関数として、透過光強度がどのように変化するかを見てみよう。結果は図のようになる。結晶の厚さを適当に調整し、図の A の範囲が可視領域としよう。この時透過光の色は、この領域で最大強度となる波長である。この色を干渉色という。従って入射光として白色光を入れると、結晶の厚さ、位相差の違いが干渉色の違いとして観測出来る。ただし、あまりに結晶の厚さが厚い時は、可視光領域の中にたくさんのピークが出来るので、この干渉色の

混色となってしまい白く見える。
(1) 、(2)は偏光顕微鏡の原理として非常によく使われる。

–··-

演習問題

問1　右回り円偏光を任意の方位角の半波長板を通すと、左回り円偏光となることを Jones 法で示せ。

問2　方位角が 0 の直線偏光を方位角が 45°、位相差がδの結晶板を通した時の偏光状態を求めよ。この偏光を更に方位角が 0 の 4 分の 1 波長板を通したらどのような偏光が得られるか（Senarmont 法）。