第１章　　光の偏光状態の記述

１．　直線偏光、円偏光、楕円偏光

光は可視領域の波長をもつ電磁波である。したがって自由空間では横波である。今、光が進む方向をｚ軸とすると、振動する電場ベクトル（結晶中を伝播する波に対しては、電場ではなく電気変位ベクトルＤを用いた方が便利、理由は後述）は２つの自由度,すなわち x、ｙ成分、Dx，Dy をもつ。光の角振動数をω、波数ベクトルをｋと書くと Dx,Dy は次式で表される。

$$D_x = A_x \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_x)$$
$$D_y = A_y \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_x) \quad （１．１）$$

ここでＡは振幅、δは位相である。

光の偏光状態は振幅 Ax,Ay および位相δx,δy によって決められる。

（１）直線偏光

$$\delta_x - \delta_x = 0 \text{ or } n\pi \ (n = integer) \quad （１．２）$$

このとき

$$A_y/A_x = \pm 1 \quad （１．３）$$

したがって、Ｄはｘ軸から一定の角度θ（tanθ＝Ay/Ax）をなす平面上を角振動数ωで振動しながらｚ方向に伝播する。これを直線偏光と言う。

（２）円偏光

もし

$$A_y = A_x = A$$
$$\delta_y = \delta_x \pm (2m+1)(\pi/2), \ (m = integer) \quad （１．４）$$

なら

$$D_x^2 + D_y^2 = A^2 \quad （１．５）$$

すなわちＤは円を描く。これを円偏光と言う。円偏光には右回りと左周りがある。一般に光を迎えるようにして見たとき、Ｄが時計回りに回転するとき、これを「右回り」と定義する。反時計まわりが左回りである。このように定義するとｙ軸方向の位相が、ｘ軸より進んでいるときに右回りとなる。すなわち

$$\delta_y - \delta_x > 0 \quad \text{が右回り}$$

$\delta_y - \delta_x < 0$　が左回りである。

（３）楕円偏光

Dx,Dy の間に、（１・２）や（１．４）の関係が無い場合には、Ｄベクトルの描く曲線は楕円となる。すなわち（１．１）式から次式が導かれる。

$$(D_x / A_x)^2 + (D_y / A_y)^2 - 2(D_x / A_x)(D_x / A_x)\cos\delta = (\sin\delta)^2$$

（１．６）

ここでδは位相差、すなわち

$$\delta_y - \delta_x \equiv \delta$$

である。

この式は楕円を表す。楕円偏光の場合も円偏光と同じく、δの正負によってそれ右回り、左回りがある。

　楕円は次ぎの３つのパラメータによって記述される。すなわち

（ア）方位（Azimuth）ψ：楕円の主軸の一つがｘ軸となす角度

（イ）楕円率(Ellipticity) χ：楕円の膨らみ

図１の記号を用いると

$$\tan\chi = \ell / m \qquad （１．７）$$

で表される。 したがってχ＝０の時は直線偏光を、$\chi = \pm\pi/4$のときは円偏光を表す（符号は正のとき右回り）

（ロ）楕円の大きさ＝光の強度：$\ell^2 + m^2$ で表される。

これら３つのパラメータの間には次の重要な式が成立する（証明は略）。

$$\ell^2 + m^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$\tan(2\Phi) = \tan(2\alpha)\cdot\cos(\delta)$$

$$\sin(2\chi) = \sin(2\alpha)\cdot\sin(\delta)$$

（１．８）

where

$$\tan\alpha = A_y / A_y$$

２．　Jones ベクトルによる偏光の記述

偏光を記述するのは色々な便利な方法が知られている。この中でもっとも良く用いられる Jones ベクトルについて述べる。

光が結晶中を伝播するとき位相変化を受けるが、そのとき結晶の異方性のためにｘ方向とｙ方向の位相が異なってくる。このために結晶を出たときには、光の偏光状態が変化する。これは光の偏光状態を変化される素子として光エレクトロニックスでよく用いられる方法である。

これは光の偏光状態を表すのに、Dx とＤｙを成分とする２次元ベクトルを用いる方法である。すなわち

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \exp\{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_x)\} \\ A_y \exp\{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_y)\} \end{pmatrix} \qquad (1.\ 9)$$

ここで偏光を記述するときには、相対的な位相差が重要なので（１．９）式で共通な位相（ωｔ－ｋｒ）は考えなくてよい。

そこで

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \exp(i\delta_x) \\ A_y \exp(i\delta_y) \end{pmatrix} \qquad (1.\ 10)$$

また強度を１に規格化しておく。

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \exp(i\delta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \exp(-i\delta/2) \\ A_y \exp(i\delta/2) \end{pmatrix} \qquad (1.\ 11)$$

（１）Jones マトリックスによる直線偏光の記述

直線偏光ではδ＝ｎπなので

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \\ \pm A_y \end{pmatrix} \qquad (1.\ 12)$$

あるいは直線偏光の方位Φを用いると

$$A_x \,/\, \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \cos\Phi$$
$$A_y \,/\, \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sin\Phi \qquad (1.\ 13)$$

なので

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \Phi \\ \sin\ \Phi \end{pmatrix} \qquad (1.14)$$

となる。

したがって、ｘ軸に平行な直線偏光は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

ｙ軸に平行な直線偏光は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

となる。

（２）Jones ベクトルによる円偏光の記述

円偏光では、（１．４）式が成立するので

右回り円偏光は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

左回りは

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

となる。

（３） 楕円偏光の場合

（１．８）式のαを用いると

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\ \exp(-i\delta/2) \\ \sin\alpha \exp(i\delta/2) \end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

となる。

これから方位Φや楕円率χは（１．８）式を用いて求めることができる。

（４）直交する偏光

一般的に２つの（複素）ベクトルＡ，Ｂが直交する条件はＡ・Ｂ＊＝０となることである。いまＡの成分を（ｍ、ｎ）とするとＢが（－ｎ＊、ｍ＊）であれ

ばこの条件を満たす。なぜなら

$$(m,n)\begin{pmatrix} -n^* \\ m^* \end{pmatrix}^* = -mn + nm = 0 \qquad (1.20)$$

したがって

２つの直交する直線偏光は

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \end{pmatrix} \quad と \quad \begin{pmatrix} -\sin\Phi \\ \cos\Phi \end{pmatrix}$$ である、

これより当然のことながらｘ軸方向に偏光した光 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するものは

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、これはｙ軸方向に偏光した直線変更である。

円偏光の場合には

右回り円偏光

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

に直交する偏光は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、これは左周り円偏光である。どのような偏光も、直交する２つの偏光を基底として、そのベクトル和で表すことができる。

演習問題

（１）Jones ベクトルを用いて、直線偏光は右回り円偏光と左回り円偏光の和で表されることを示せ。

（２）Jones ベクトルを用いて、右回り円偏光は、２つの直交する直線偏光に分解できることを示せ。